

Fonction exponentielle(quelques exercices de base):corrigé

Résoudre les équations et inéquations :

• $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

on pose $X = e^x$.on obtient : $X^2 + 3X - 4 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -4$
 $X = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $X = -4$ est impossible car $e^x > 0$. finalement : $S = \{0\}$

• $e^{3x} - e^x = 0$

on pose $X = e^x$.on obtient : $X^3 - X = 0 \Leftrightarrow X(X^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow X = 0, 1$
 ou -1
 $X = 0$ ou -1 sont impossibles car $e^x > 0$ et $X = 1 \Leftrightarrow x = 0$. $S = \{0\}$

• $e^x + e^{-x} = 1$

on pose $X = e^x$.on obtient : $X + \frac{1}{X} = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow X^2 - X + 1 = 0$
 $\Delta = -3$ il n'y a donc pas de solution .

• $e^{2x-1} < \sqrt{e} \Leftrightarrow e^{2x-1} < e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x - 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$

• $4e^{2x} < 3e^x + 1$

on pose $X = e^x$.on obtient : $4X^2 < 3X + 1 \Leftrightarrow 4X^2 - 3X - 1 < 0$
 les racines de ce polynôme sont : $X = 1$ et $X = -\frac{1}{4}$
 d'après la règle connue (signe de a à l'extérieur des racines) on obtient :
 $-\frac{1}{4} < X < 1$
 l'inégalité de gauche est toujours vraie car $X = e^x > 0$
 de plus : $X < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$

• $e^{\frac{2x-1}{3x+1}} > \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^{\frac{2x-1}{3x+1}} > e^{-2} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3x+1} > -2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3x+1} + 2 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x-1+6x+2}{3x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{8x+1}{3x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{8}$ ou $x > -\frac{1}{3}$

calculer les limites suivantes :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^{2x}(1 + \frac{1}{e^{2x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^{2x}})} = 0$ car

⁰<http://pierre.warnault.free.fr>

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(1 - \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 10000x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - 10000\frac{x}{e^x}) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - x^2 + \pi = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x}(1 - \frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{\pi}{e^{2x}}) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x}{e^x})^2 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e\sqrt{x} + e^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - e\frac{\sqrt{x}}{e^x} + \frac{e^2}{e^x}) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$)

Etudier les fonctions :

- $f(x) = e^{-x} + x - 1$

$$f'(x) = -e^{-x} + 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow 0 < x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + x - 1 = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + x - 1 = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X - X - 1 = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X(1 - \frac{X}{e^X} - \frac{1}{e^X}) = +\infty$$

car

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$-$	0
f	$+\infty$	\searrow	0
			\nearrow
			$+\infty$

- $f(x) = \frac{e^{2x-1}}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x-1}(x-2) - e^{2x-1}}{(x-2)^2} = e^{2x-1} \frac{2x-5}{(x-2)^2} \text{ du signe de } 2x-5 \text{ (} e^{2x-1} > 0 \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x-1}}{x-2} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-1}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} \frac{e^{-1}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$$

(puisque $\frac{e^{2x}}{x} > \frac{e^x}{x}$ pour $x > 0$) et $e^{-1} > 0$

⁰<http://pierre.warnault.free.fr>

$$\lim_{x \rightarrow 2} e^{2x-1} = e^3 > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2x-1}}{x-2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2x-1}}{x-2} = -\infty$$

x	$-\infty$	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	\parallel	0	$+$
f	0	\parallel	$2e^4$	$+\infty$

• $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$

$$f'(x) = 2e^{-x} + (2x - 1)(-e^{-x}) = e^{-x}(-2x + 3) \text{ du signe de } -2x + 3 \text{ car } e^{-x} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^{-x} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$2e^{-\frac{3}{2}}$	0

• $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$

$$f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 - 2)2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$$

$$e^{2x} > 0$$

$x^2 + x - 2 = 0$ a pour racines : $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et est positif à l'extérieur des racines .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2)e^{2x} = +\infty \text{ (aucun problème)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2)e^{2x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)^2 = 0$$

x	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	$+$
f	0	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} e^{-1 - \sqrt{5}}$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} e^{-1 + \sqrt{5}}$	$+\infty$

⁰<http://pierre.warnault.free.fr>